6/3/19

• **ΟΡΙΣΜΟΣ Συνέχειας**: $f:(X,d)\to(Y,\rho)$, $x_0\in X$

f συνεχής στο $x_0 \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : d(x,x_n)<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(x_n))<\varepsilon$

ή $f(S(x_0,\delta)) \subseteq S(f(x_0),\varepsilon)$

f συνεχής $\Longleftrightarrow$ f συνεχής στο x $\forall x\in X$

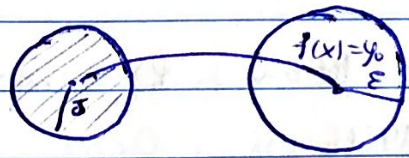
ΠΑΡΑΤ.:

• $f:(X,d)\to(Y,\rho)$, $y_0\in Y$

$f(x)=y_0$ (σταθερή)

Η f είναι συνεχής

δ οποιοδήποτε



• (X,d) διακριτός, (Y,ρ)

Κάθε $f: X\to Y$ είναι συνεχής ($\delta<1$)

Χαρακτηρισμός συνέχειας:

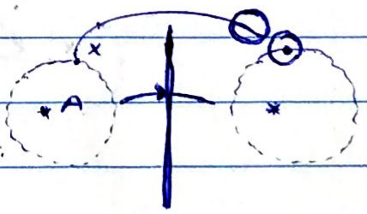
$f:(X,d)\to(Y,\rho)$

Τ.Α.Ε.Ι.: (i) f συνεχής

(ii) $\forall G$ ανοικτό στο Y: $f^{-1}(G)$ ανοικτό στο X

(iii) $\forall F$ κλειστό στο Y: $f^{-1}(F)$ κλειστό στο X

(iv) $\forall A\subseteq X$: $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$



(v) $\forall x\in X$ $\forall x_n\to x$, $\{x_n\}\subseteq X$:

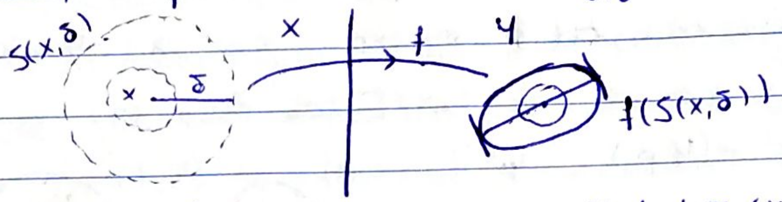
$f(x_n)\to f(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 3-8:

$f:(X,d)\to(Y,\rho)$ ταλάντωση της f

Θέτουμε: $\tau_f : X\to\mathbb{R}$, $\tau_f(x)=\inf\limits_{\delta>0}\delta(f(S(x,\delta)))$



i) Ν.δ.ο. f συνεχής στο $x\in X \iff \tau_f(x)=0$

ΛΥΣΗ:

$\Rightarrow$) $\tau_f(x)=0 \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \delta(f(S(x_0,\delta)))<\varepsilon$ (1)

Από συνέχεια:

$\exists\delta>0 : f(S(x_0,\delta))\subseteq S(f(x_0),\varepsilon)$

$\delta(S(f(x_0),\varepsilon))\le 2\varepsilon$

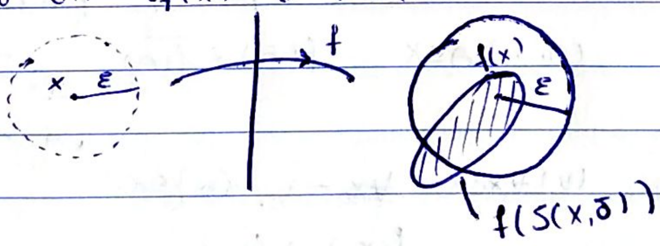
Εφαρμόζουμε τον ορισμό συνέχειας για $\varepsilon=\varepsilon/3$

$\exists\delta>0 : f(S(x,\delta))\subseteq S(f(x),\varepsilon/3)$

$\Rightarrow \delta(f(S(x,\delta)))\le\delta(S(f(x),\varepsilon/3))\le\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$

Άρα ισχύει η (1)

$\Leftarrow$) Έστω ότι $\tau_f(x)=0 \iff (1)$



Από (1) $\Rightarrow \exists\delta>0 : \delta(f(S(x,\delta)))<\varepsilon$

$\Rightarrow f(S(x,\delta))\subseteq S(f(x),\varepsilon)$ (Γιατί ?)

ii) $A=\{x\in X \mid \tau_f(x)<r\}$ είναι ανοικτό ($r\in\mathbb{R}$)

ΛΥΣΗ:

Αν $r\le 0$: $A=\emptyset$ → ισχύει

Έστω $r>0$

Έστω $x_0\in A \overset{\text{θ.ν.δ.ο.}}{\Rightarrow} \exists\delta>0 : S(x_0,\delta)\subseteq A$

δηλ. θ.ν.δ.ο. αν $x\in S(x_0,\delta)\Rightarrow \underbrace{\tau_f(x)}_{=\,\inf\ldots}<r$

$\tau_f(x_0) < r \iff \exists\, \delta > 0 : \delta(f(S(x_0,\delta))) < r$

Αν $x \in S(x_0,\delta)$ κ. $S(x,\delta_1) \subseteq S(x_0,r)$

$$\Rightarrow \delta(f(S(x,\delta_1))) \le \delta(f(S(x_0,r))) < r$$

$$\Rightarrow \tau(x) < r \Rightarrow x \in A \Rightarrow S(x_0,r) \subseteq A$$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ** Ομοιόμορφης Συνέχειας: Η $f:(X,d) \to (Y,\rho)$ λέγεται ομοιόμορφα συνεχής $\overset{\text{ορ.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : d(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x),f(y)) < \varepsilon$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ.}}$:

• X, $A \subseteq X$

$u : X \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $x \to u(x) = d(x,A)$ (1)

Ξέρουμε ότι:

$$\rho(u(x),u(y)) = |u(x) - u(y)| = |d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$$

$\forall \varepsilon > 0 \to \delta = \varepsilon$ κ. ισχύει η (1)

• $f:(X,d) \to (Y,\rho)$ λέγεται Lipschitz αν $\exists\, k > 0$:

$$\rho(f(x),f(y)) \le k \cdot d(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

Αν f Lipschitz $\Rightarrow f$ ομοιόμ. συνεχής

$\varepsilon > 0 \to \delta = \frac{\varepsilon}{k}$

• $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

Η f δεν είναι ομοιόμ. συνεχής:

$$|f(x+a) - f(x)| = (x+a)^2 - x^2 = 2ax + a^2 < \varepsilon$$

∞

x $\quad x+a$

$2xa < \varepsilon \iff x < \frac{\varepsilon}{2a}$

δε γίνεται για όλα τα x

"Υπόχωροι"

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:** (X,d) μ.χ. , $A \subseteq X$

Ο χώρος $(A, d_{A\times A})$ λέγεται υπόχωρος του (X,d)

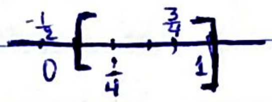
$$d_{A\times A}(x,y) = d(x,y) \quad \forall x,y \in A$$

$$d_{A\times A} = d_A = d$$

Βασικές Προτάσεις:

- $a \in A$

$$S_A(a,r) = S(a,r) \cap A$$

π.χ. 

$A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$

↑ υπόχωρο

$$S_A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right) \cap A = \left[0, \frac{3}{4}\right]$$

- $U \subseteq A$ είναι ανοικτό στο $A \Leftrightarrow \exists\, V$ ανοικτό στο X : $U = V \cap A$
- Τα ανοικτά του A είναι ανοικτά $\Leftrightarrow$ A ανοικτό στο X
- (i) $K \subseteq A$ κλειστό στο $A \Leftrightarrow \exists\, L$ κλειστό στο X : $K = L \cap A$

  (ii) Κάθε κλειστό στο A είναι κλειστό στο $X \Leftrightarrow A$ κλειστό στο X
- $K \subseteq A$ κλειστό στο $A \Leftrightarrow A \setminus K$ ανοικτό στο A

  δηλ. $A \setminus K = U \cap A$, όπου U ανοικτό

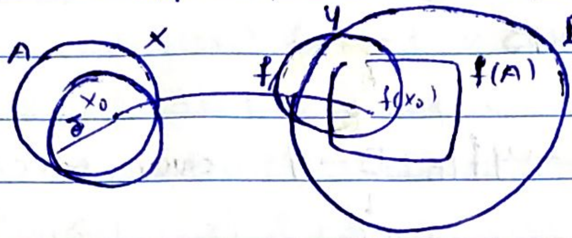
  $\Leftrightarrow K = \underbrace{(X \setminus U)}_{L} \cap A$

- $F \subseteq A$

  $cl_A(F) = \overline{F} \cap A$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$ 4-6:

$f:(X,d)\to(Y,\rho)$, $x_0\in A\subseteq X$, $f(X)\subseteq B\subseteq Y$



(i) Ν.α.ο. αν f συνεχής στο x_0 $\Rightarrow f|_A : A\to B$ συνεχής στο x

ΛΥΣΗ:

Έστω $\varepsilon>0$ $\quad S_B(f(x_0),\varepsilon) = S(f(x_0),\varepsilon)\cap B$

$\Rightarrow \exists\delta>0 : f(S(x_0,\delta))\subseteq S(f(x_0),\varepsilon)$

Άρα επειδή $S_A(x_0,\delta) = S(x_0,\delta)\cap A$

$$\Rightarrow f(S_A(x_0,\delta)) = f(S(x_0,\delta)\cap A)\subseteq f(S(x_0,\delta))\cap f(A)$$
$$\subseteq \underbrace{S(f(x_0),\varepsilon)\cap B}_{S_B(f(x_0),\varepsilon)}$$

Ισχύει το αντίστροφο?

ΟΧΙ! π.χ. Συν/ση Dirichlet

↳ συνεχής στους ρητούς

κ. ασυνεχής στους άρρητους

Σημείωση: $f(x)=1$ συνεχής στο $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R} \to f|_{\mathbb{Q}}$ συνεχής

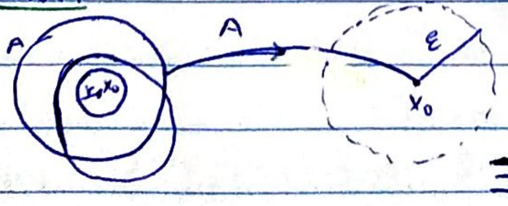
$$g(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\in\mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

$g|_{\mathbb{Q}} = f|_{\mathbb{Q}}$ συνεχής στο $\mathbb{Q}$

(iii) Ν.δ.ο. αν A περιοχή του x_0 κ. $f|_A$ συνεχής στο x_0

$\Rightarrow f$ συνεχής στο x_0

ΛΥΣΗ:



$\varepsilon>0$, $S(f(x_0),\varepsilon)$

$\exists\delta>0 : f(S(x_0,\delta)\cap A)\subseteq S(f(x_0),\varepsilon)$

$x_0\in S(x_0,\delta)\cap S(x_0,r)\subseteq S(x_0,\delta)\cap A$

$\exists\delta>0 : S(x_0,\delta)\subseteq S(x_0,\delta)\cap S(x_0,r)\subseteq f(S(x_0,r))$

$\subseteq S(f(x_0),r)$

ΑΣΚΗΣΗ (HW):

(X, d), (Y, ρ) μ.χ.

$X = A \cup B$, $x_0 \in A \cap B$.

$f : X \to Y$

Αν $f|_A : \underset{(A, d_A)}{A} \to X$, $f|_B : \underset{(B, d_B)}{B} \to Y$ είναι συνεχείς στο x_0

τότε $f : X \to Y$ είναι συνεχής στο x_0

$\Downarrow$

Εφαρμογή: Ν.δ.ο. η $g(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ συνεχής στο $\mathbb{Q}$